

spontaneous transition probabilities increase like  $Z^4 A_{ji}$  whereas the collisional rate coefficients decrease like  $Z^{-3}$ .

The numerical values published in this paper refer to an idealized homogeneous plasma. Under actual conditions one has to account for the inhomogeneous character of all plasmas. Generally speaking, one has to calculate the population densities from a coupled system of rate equations coupled with the corresponding radiative rate equations. The numerical values given here may nevertheless give a very good idea on what happens when substantial radiative absorption exists.

The decrease of the plasma temperature towards the boundary will slightly favour the establishment

of L.T.E. compared to the values given in the figures. This is due to the fact that the outer cold plasmas zones are under the influence of the radiation field originating from the central hot zone. On the other hand, the radiation field of the cold boundary zones will practically not influence the population densities of the central hot part of temperature  $T_e$ .

One concludes from these calculations that it will be very difficult to establish complete L. T. E. in the level system of hydrogen below electron densities of about  $1 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ .

I thank Miss F. EMARD for having written the computer programme.

## Bestimmung des Elektronendichteprofiles in Plasmen mit Hilfe von Hohlraumresonatoren

G. JANZEN

Institut für Gasentladungen und Photoelektronik der Universität Stuttgart

(Z. Naturforsch. 24 a, 1496—1501 [1969]; eingegangen am 4. Juli 1969)

*Determination of Plasma Electron Density Profiles by Means of Resonant Cavities*

The shift of the resonant frequency of microwave cavities excited in  $\text{TM}_{0m0}$  ( $m=1, 2, 3$ ),  $\text{TM}_{l10}$  ( $l=1, 2$ ),  $\text{TE}_{01n}$  ( $n>0$ , integer) modes under the influence of a plasma is calculated for arbitrary radii of plasma and cavity for Bessel profile and common parabolic profiles.

In measuring the frequency shift for two of the cited cavity mode types an approximate electron density profile can be determined from the submitted diagrams.

Die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  eines Mikrowellen-Hohlraumresonators verändert sich unter dem Einfluß eines Dielektrikums im Resonator. Wird ein Plasma als Dielektrikum verwendet, so ist es möglich, aus der Verschiebung  $\Delta\omega$  der Resonanzfrequenz die Elektronendichte  $n$  des Plasmas zu bestimmen<sup>1</sup>. Bisher durchgeführte Rechnungen setzten ein bestimmtes Verhältnis der Radien der Plasmasäule und des Resonators und einschränkende Elektronendichteprofile voraus, oder bedingten weitere umfangreichere Rechnungen zur Bestimmung des Profils<sup>2-8</sup>.

Für Resonatoren der Typen  $\text{TM}_{010}$ ,  $\text{TM}_{020}$ ,  $\text{TM}_{030}$ ,  $\text{TM}_{110}$ ,  $\text{TM}_{210}$ ,  $\text{TE}_{01n}$  wird hier die Fre-

quenzverschiebung  $\Delta\omega$  und die Güteänderung  $\Delta(1/Q)$  für beliebige Verhältnisse von Plasmradius zu Resonatorradius bei beliebiger Resonanzfrequenz für Besselsche  $J_0$ -, rechteckförmige und allgemeine parabolische Dichteverteilungen berechnet. Aus Messungen in zwei Resonatormoden am selben Plasma läßt sich das Dichteprofil bestimmen.

### 1. Berechnung

Nach SLATER<sup>9</sup> beträgt die Frequenzverschiebung  $\Delta\omega$  und die Güteänderung  $\Delta(1/Q)$  eines Hohlraumresonators mit der ungestörten Resonanzfrequenz  $\omega_0$  und der ungestörten Mikrowellenfeldstärke  $E(r)$  bei

<sup>1</sup> S. J. BUCHSBAUM u. S. C. BROWN, Phys. Rev. **106**, 196 [1957].

<sup>2</sup> S. C. BROWN, Proc. 2nd Intern. Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy (Geneva) **32**, 394 [1958].

<sup>3</sup> S. J. BUCHSBAUM, L. MOWER u. S. C. BROWN, Phys. Fluids **3**, 806 [1960].

<sup>4</sup> W. HESS, Z. Angew. Phys. **18**, 68 [1964].

<sup>5</sup> J. H. HARRIS u. D. BALFOUR, Proc. 7th Intern. Conf. Phenomena Ionized Gases, III, Beograd 1966, 79.

<sup>6</sup> J. BASU u. D. DUTTA, J. Inst. Telecommun. Engrs. **11**, 510 [1965].

<sup>7</sup> M. A. W. VLACHOS u. H. C. S. HSUAN, J. Appl. Phys. **39**, 5009 [1968].

<sup>8</sup> C. J. BURKLEY u. M. C. SEXTON, J. Appl. Phys. **39**, 5013 [1968].

<sup>9</sup> J. C. SLATER, Rev. Modern Phys. **18**, 441 [1946].



Störung durch ein Medium mit der komplexen Leitfähigkeit  $\check{\sigma}(r)$

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) - 2j \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 \varepsilon_0} \frac{\int_V \check{\sigma}(r) E^2(r) dV}{\int_V E^2(r) dV} \quad (1)$$

( $\varepsilon_0$  absolute Dielektrizitätskonstante,  $dV = r dr d\varphi dz$  Volumelement).

$$\text{Mit} \quad \check{\sigma}(r) = j \omega \varepsilon_0 [\check{\varepsilon}(r) - 1] \quad (2)$$

und der komplexen Dielektrizitätskonstanten  $\check{\varepsilon}(r)$  eines magnetfeldfreien Plasmas

$$\check{\varepsilon}(r) = 1 - \frac{\Omega^2(r)}{1 - j \nu / \omega}, \quad (3)$$

$$\text{wobei} \quad \Omega^2(r) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}(r) \quad \text{und} \quad \omega_p(r) = \left[ \frac{e^2 n(r)}{\varepsilon_0 m} \right]^{1/2} \quad (4)$$

die Plasmafrequenz ( $e$  Elementarladung,  $n(r)$  Elektronendichte,  $m$  Elektronenmasse) und  $\nu$  eine Stoßfrequenz ist, ergibt sich nach Trennung von Real- und Imaginärteil mit der Näherung  $\omega \approx \omega_0$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (\nu/\omega_0)^2} \frac{\int_V \Omega^2(r) E^2(r) dV}{\int_V E^2(r) dV}, \quad (5)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) \approx \frac{\nu/\omega_0}{1 + (\nu/\omega_0)^2} \frac{\int_V \Omega^2(r) E^2(r) dV}{\int_V E^2(r) dV}. \quad (6)$$

$$\text{Mit} \quad \Omega^2(r) \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}(r) = \frac{n(r)}{n_c}, \quad (7)$$

$$\text{wobei} \quad n_c = \omega_0^2 \varepsilon_0 m / e^2 = 1,24 \cdot 10^{10} (f_0/\text{GHz})^2 \text{ cm}^{-3} \quad (8)$$

die cut-off-Dichte bei der Frequenz  $\omega_0 = 2\pi f_0$  ist, lassen sich die Gln. (5) und (6) schreiben:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{n_c} \frac{1}{1 + (\nu/\omega_0)^2} \frac{1}{2} \frac{\int_V n(r) E^2(r) dV}{\int_V E^2(r) dV} \quad (9)$$

Plasma  
Resonator

$$\Delta(1/Q) = 2(\nu/\omega_0) \cdot (\Delta\omega/\omega_0). \quad (10)$$

Im folgenden werden das Bessel-Profil

$$n(r) = n_{0(B)} J_0(\alpha_{01} \cdot r/R_p) \quad (11)$$

und das allgemeine Parabelprofil

$$n(r) = n_{0(P)} [1 - s(r/R_p)^2] \quad (12)$$

in Gl. (9) verwendet ( $n_0$  Achsdichte,  $R_p$  Plasmaradius,  $\alpha_{01} = 2,405$ ,  $s$  Parabelparameter).

Diese Dichteprofile sind in Abb. 1 dargestellt; der Parabelparameter ist zwischen  $s=0$  und  $s=2$  verändert.

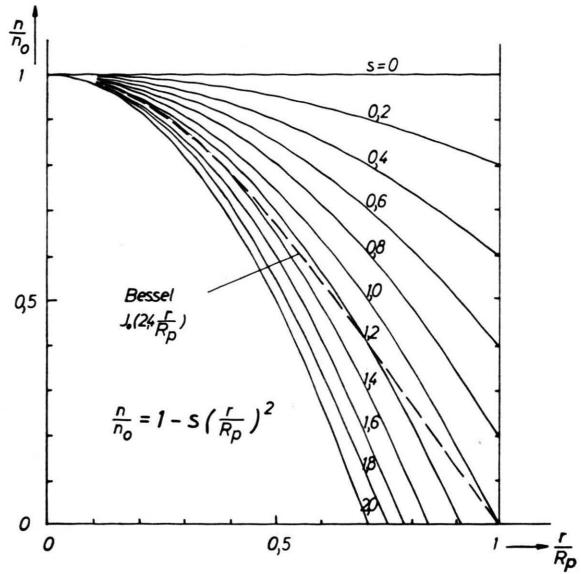


Abb. 1. Bessel- $J_0$ -Dichteprofil und Parabelprofile mit dem Parameter  $s$ .

Da sich die Frequenzverschiebung in beliebigen Resonatoren aus dem über den Rohrquerschnitt gemittelten Elektronendichtewert  $\bar{n}$  ergibt, ist für Vergleiche zwischen verschiedenen Verteilungen die Achsdichte  $n_0$  in den mittleren Dichtewert umzurechnen:

$$\bar{n} = \frac{2\pi}{\pi R_p^2} \int_{r=0}^{R_p} n(r) r dr. \quad (13)$$

Für die Bessel-Verteilung folgt damit

$$\bar{n} = 0,432 n_{0(B)}, \quad (14)$$

für die Parabelverteilungen

$$\bar{n} = (1 - \frac{1}{2}s) n_{0(P)} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq r \leq R_p \end{cases} \quad (15)$$

$$\bar{n} = (1/2s) n_{0(P)} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 1 \leq s < \infty \\ 0 \leq r \leq R_p/\sqrt{s} \end{cases}. \quad (16)$$

Gleichung (9) lautet mit den Gln. (14) bzw. (15) und (16)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\bar{n}}{n_c} \frac{1}{1 + (\nu/\omega_0)^2} F, \quad (17)$$

wobei der Geometriefaktor  $F$  für die Bessel-Verteilung lautet:

$$F_{(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{0,432} \frac{\int_{r=0}^{R_p} J_0^2(\alpha_{01} \cdot r/R_p) E^2(r) r dr}{\int_{r=0}^{R_p} E^2(r) r dr}, \quad (18)$$

und für Parabelverteilungen

$$F_{(P)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}s} \frac{\int_{r=0}^{R_p} [1 - s(r/R_p)^2] E^2(r) r dr}{\int_{r=0}^{R_r} E^2(r) r dr} \quad (19)$$

mit dem Gültigkeitsbereich  $0 \leq s \leq 1$ ;  $0 \leq r \leq R_p$  und

$$F_{(P)} = s \frac{\int_{r=0}^{R_p/\sqrt{s}} [1 - s(r/R_p)^2] E^2(r) r dr}{\int_{r=0}^{R_r} E^2(r) r dr} \quad (20)$$

mit dem Gültigkeitsbereich

$$1 \leq s < \infty; \quad 0 \leq r \leq R_p/\sqrt{s}.$$

Für Resonatoren des Typs  $TM_{lm0}$  ist die Mikrowellenfeldstärke  $E(r)$  angegeben zu<sup>10</sup>

$$E(r) = E_z = E_{z0} J_l(\alpha_{lm} \cdot r/R_r) \quad (21)$$

( $J_l$  Bessel-Funktion  $l$ -ter Ordnung, 1. Gattung, mit der  $m$ -ten Nullstelle  $\alpha_{lm}$ ;  $R_r$  Resonatorradius) und für Resonatoren des Typs  $TE_{0mn}$  zu

$$E(r) = E_\theta = E_{\theta 0} J_1(\alpha_{1m} \cdot r/R_r) \sin(n \pi z/L) \quad (22)$$

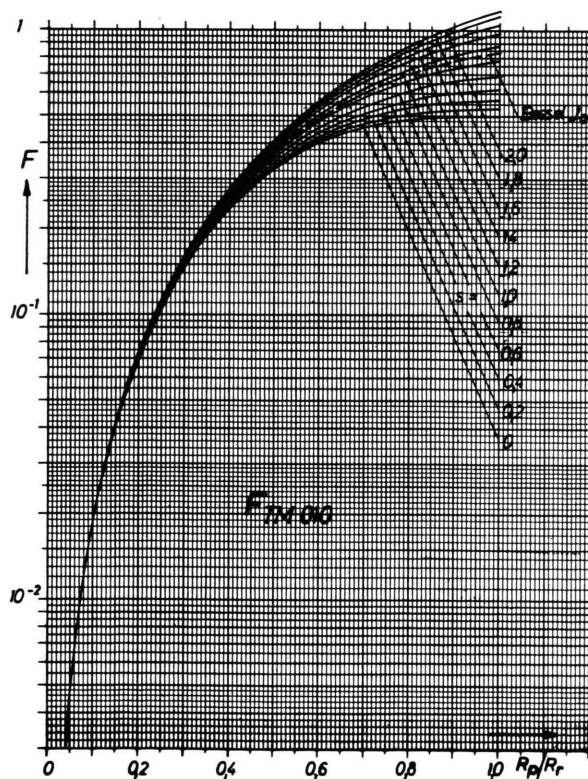


Abb. 2. Geometriefaktor  $F$  für  $TM_{010}$ -Resonatoren bei Bessel- und Parabelverteilungen als Funktion des Radienverhältnisses  $R_p/R_r$ .

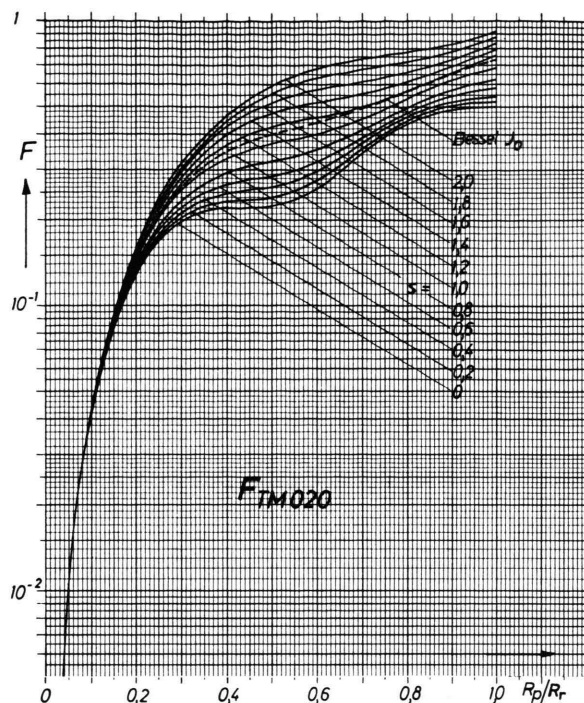


Abb. 3. Geometriefaktor  $F$  für  $TM_{020}$ -Resonatoren bei Bessel- und Parabelverteilungen als Funktion des Radienverhältnisses  $R_p/R_r$ .

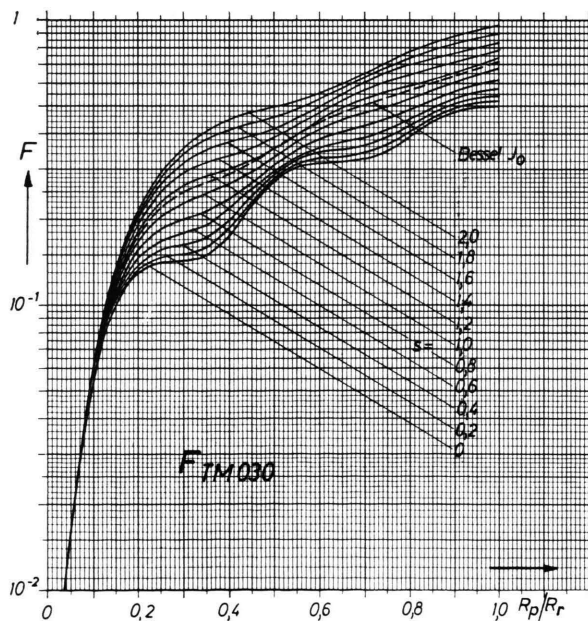


Abb. 4. Geometriefaktor  $F$  für  $TM_{030}$ -Resonatoren bei Bessel- und Parabelverteilungen als Funktion des Radienverhältnisses  $R_p/R_r$ .

<sup>10</sup> C. G. MONTGOMERY, Technique of Microwave Measurements, MIT Rad. Lab. Ser. Vol. 11, McGraw-Hill, New York 1947.



( $J_1$  Bessel-Funktion 1. Ordnung, 1. Gattung, mit der  $m$ -ten Nullstelle  $\alpha_{1m}$ ;  $n$  Zahl der Feldstärkemaxima bzw. -minima;  $L$  Resonatorlänge).

Der Geometriefaktor  $F$  ist also abhängig vom Resonatormode, vom Elektronendichteprofil  $n(r)$  und vom Radienverhältnis  $R_p/R_r$ .

In den Abb. 2–6 ist dieser Faktor als Funktion von  $R_p/R_r$  und dem Dichteprofilparameter  $s$  der Parabelprofile und für Bessel-Verteilung für die verschiedenen Resonatortypen angegeben.

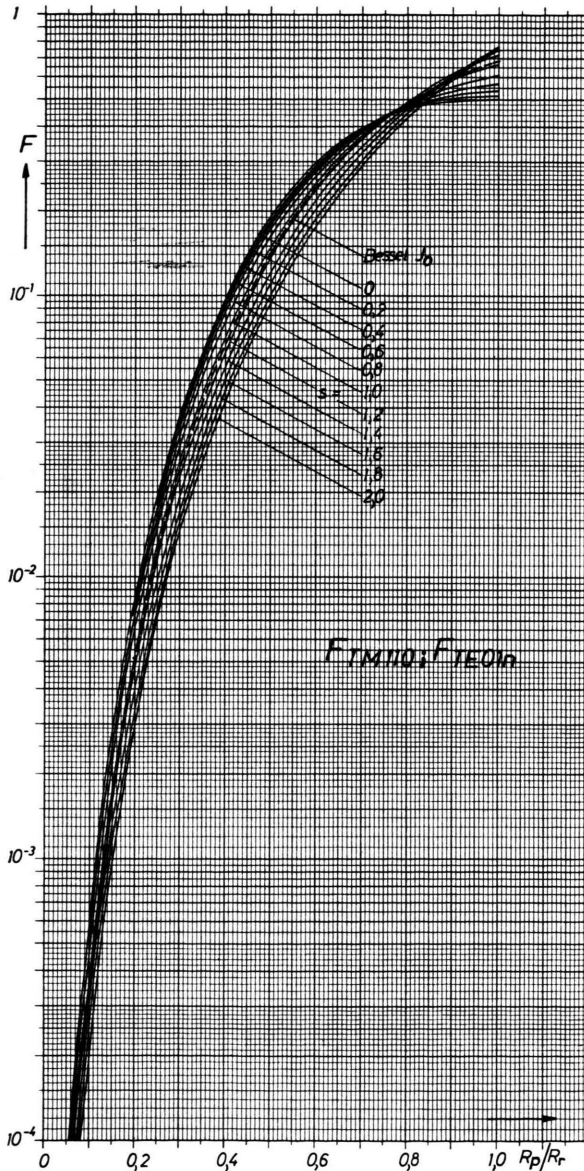


Abb. 5. Geometriefaktor für  $TE_{01n}$ - bzw.  $TM_{110}$ -Resonatoren bei Bessel- und Parabelverteilungen als Funktion des Radienverhältnisses  $R_p/R_r$ .

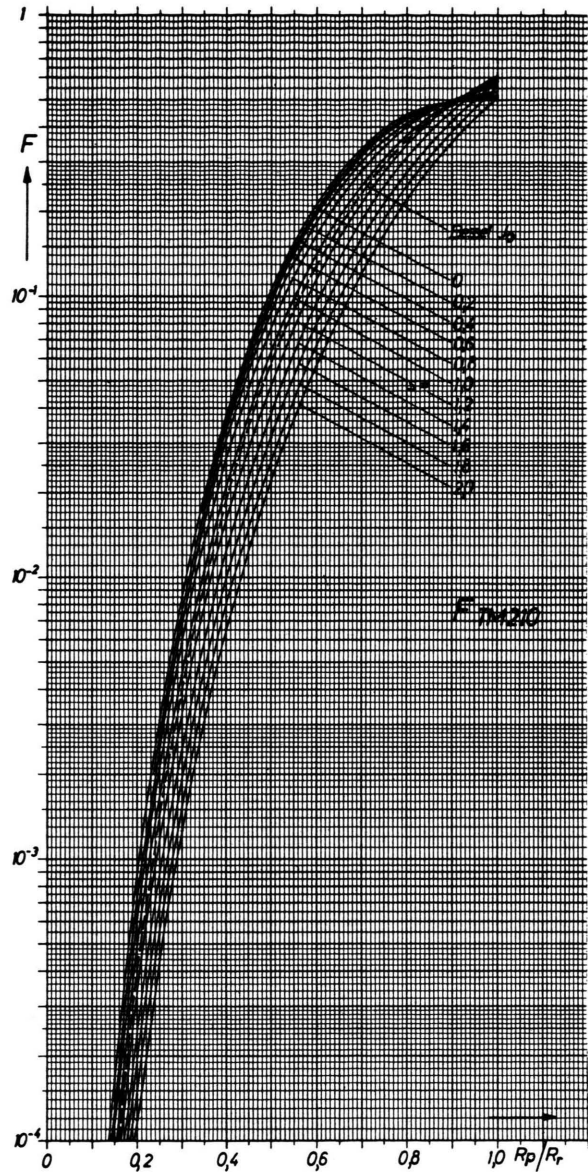


Abb. 6. Geometriefaktor  $F$  für  $TM_{210}$ -Resonatoren bei Bessel- und Parabelverteilungen als Funktion des Radienverhältnisses  $R_p/R_r$ .

## 2. Bestimmung des Dichteprofls

Aus dem Verhältnis der Frequenzverstimmung zweier Resonatoren, die in verschiedenen Moden schwingen, läßt sich das Dichteprofil der Elektronen bestimmen.

Bei Vernachlässigung der Stöße ist der Geometriefaktor  $F_1$  des unbekannten Dichteprofls mit dem

Parameter  $s = s_0$  bei gegebenem Radienverhältnis  $(R_p/R_r)_1$  für den Resonator 1

$$\Delta\omega_1/\omega_{01} = (\bar{n}/n_{c1}) F_1(s_0; (R_p/R_r)_1). \quad (23)$$

Für den 2. Resonator gilt diese Gleichung entsprechend mit dem Index 2.

Der Quotient der normierten Frequenzverstimung der beiden Resonatoren ist

$$\frac{\Delta\omega_1/\omega_{01}}{\Delta\omega_2/\omega_{02}} = \frac{n_{c2}}{n_{c1}} V\left(s_0; \left(\frac{R_p}{R_r}\right)_1; \left(\frac{R_p}{R_r}\right)_2\right) \quad (24)$$

mit 
$$V = \frac{F_1(s_0; (R_p/R_r)_1)}{F_2(s_0; (R_p/R_r)_2)}. \quad (25)$$

Mit Gl. (8) folgt

$$V = \frac{\Delta\omega_1/\omega_{01}}{\Delta\omega_2/\omega_{02}}. \quad (26)$$

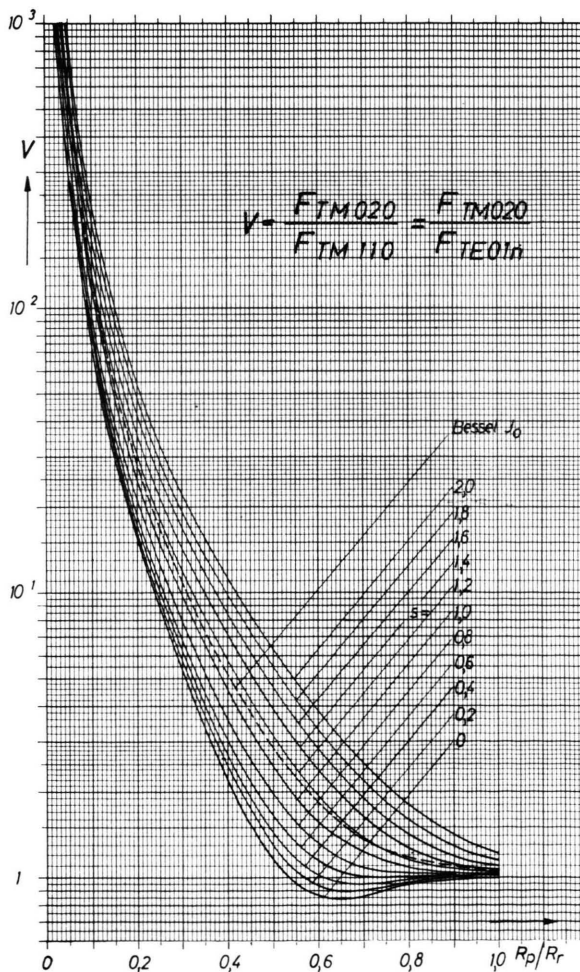


Abb. 7. Verhältnis  $V$  der Geometriefaktoren zweier Resonatoren ( $TM_{020}$  zu  $TE_{01n}$  bzw.  $TM_{110}$ ) für Bessel- und Parabelprofile als Funktion von  $R_p/R_r$ .

Zur Bestimmung des Dichteprofiles ist nach Gl. (25) der Quotient  $V$  der Geometriefaktoren  $F$  bei dem gegebenen Radienverhältnis  $R_p/R_r$  für jeweils gleiche Werte  $s$  zu bilden und mit dem nach Gl. (26) experimentell bestimmten zu vergleichen.

Für gleiche Radien  $R_r$  der beiden Resonatoren ist in den Abb. 7–9 der Quotient  $V$  aus den Geometriefaktoren für die Resonatorpaare  $TM_{020}$  und  $TE_{01n}$  bzw.  $TM_{110}$ ,  $TM_{020}$  und  $TM_{210}$ ,  $TM_{110}$  bzw.

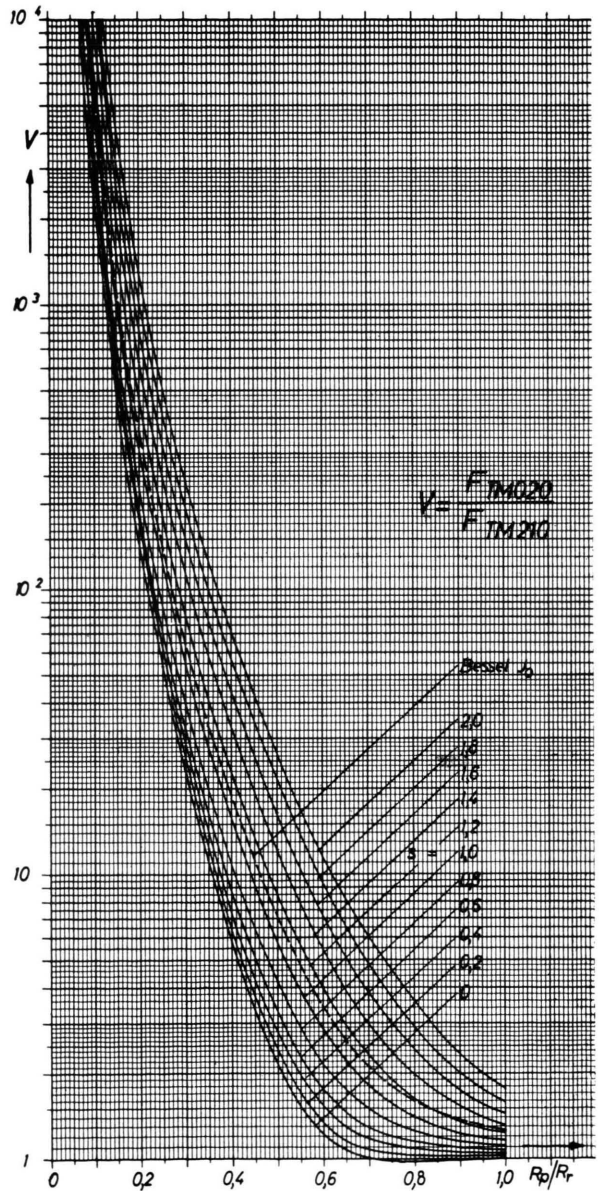
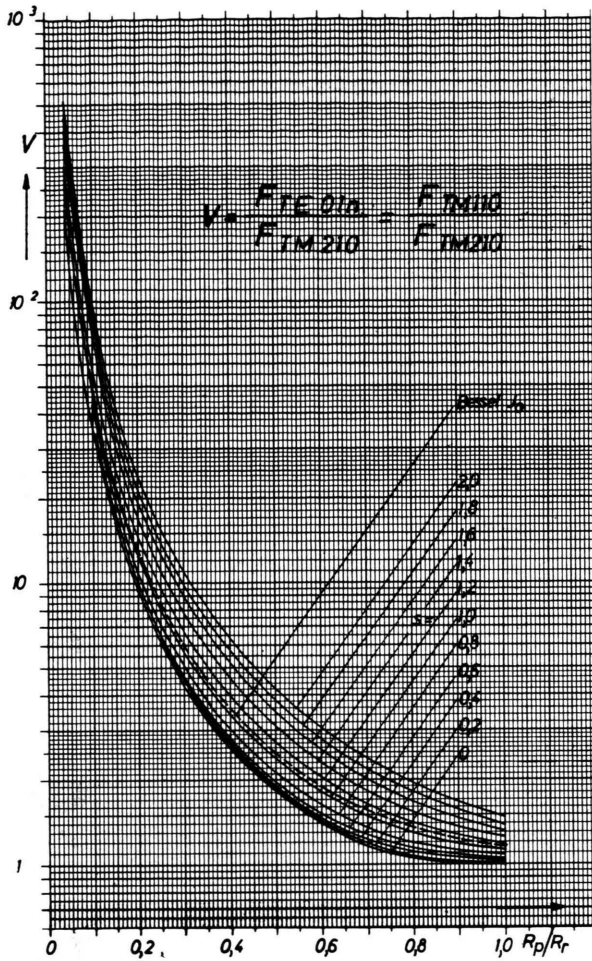


Abb. 8. Verhältnis  $V$  der Geometriefaktoren zweier Resonatoren ( $TM_{020}$  zu  $TM_{210}$ ) für Bessel- und Parabelprofile als Funktion von  $R_p/R_r$ .



$TE_{01n}$  und  $TM_{210}$  dargestellt. Mit bekanntem Parameter  $s_0$  läßt sich nach Gl. (23) die mittlere Dichte  $\bar{n}$  und mit Gl. (15) bzw. (16) die Achsmittendichte  $n_0$  bestimmen.

Herrn Prof. Dr. W. KLUGE danke ich für die freundliche Förderung dieser Arbeit, Fräulein ANGELE vom Institut für Plasmaforschung für die Durchführung der numerischen Rechnungen und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung.

Abb. 9. Verhältnis  $V$  der Geometriefaktoren zweier Resonatoren ( $TM_{110}$  bzw.  $TE_{01n}$  zu  $TM_{210}$ ) für Bessel- und Parabelprofile als Funktion von  $R_p/R_r$ .